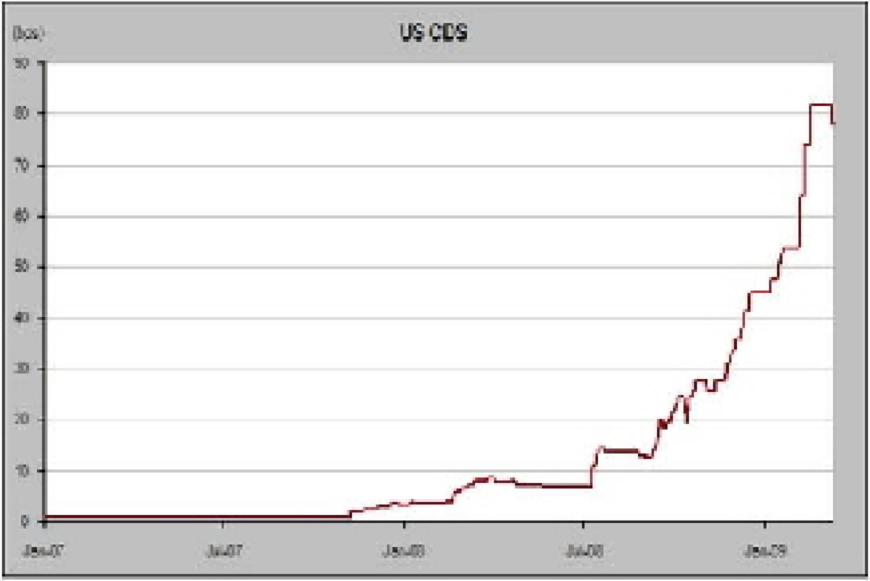
A kockázatmentes mérték

Altenburger előadás

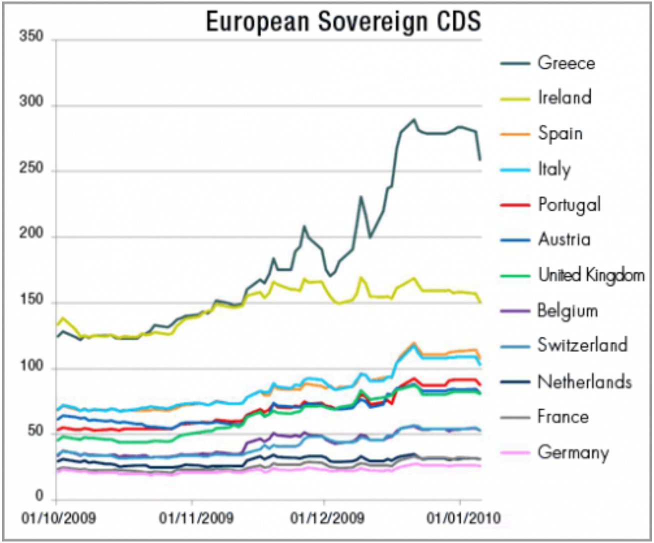
Medvegyev Péter

2011

US CDS spreads, 2009



EU CDS, 2010



European Sovereign CDS
350
300
250
200
150
100
50
0
01/10/2009
01/11/2009
01/12/2009
01/01/2010
Greece
Ireland
Spain
Italy
Portugal
Austria
United Kingdom
Belgium
Switzerland
Netherlands
France
Germany

US CDS 2011

CDS 2011, Magyarország, UK

Szokásos reakciók

1. As with any CDS-related news, you will get heated commentary in the blogosphere with a large perception of folks simply calling for all CDS trading to be banned. The general consensus appears to be "don't the buyers of CDS realize that in the event of default by US, these contracts are not likely to be honored anyway?" This is Krugman's line. Taleb chimes in with "It would be like buying insurance on the Titanic from someone on the Titanic".
2. Traders don't buy CDS because they think the name will default; they buy CDS because they think the spread will widen – I make this point in my AIG post. It follows that extrapolating any default information from wider CDS spreads can be misleading.
3. I don't need to have a position in the entity's bonds or loans in order to trade CDS on the same entity (while I do need to own the house I buy fire insurance on)
4. As I mention above the vast majority of traders don't trade CDS because of a view on default – they trade CDS because of their view on the level of CDS spreads expecting to lock in a MTM profit on the trade.

A CDO árazás mint a kockázat melletti döntés zsákutcája

A CDO, illetve a shortolást lehetővé tevő CDS-ek esetén az alapfeltétel, hogy az együttes bedőlések a valószínűségszámítás szabályai alapján történnek. Például ha egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel dőlnek be a cégek úgy pusztán $1/8$ a valószínűsége annak, hogy háromból mind a három cég bedől, illetve ennek tükreként, hogy egy sem dől be. Ennek megfelelően $1 - 1/8 = 7/8$ annak a valószínűsége hogy legalább egy bedől. Következésképpen, miközben a CDO alsó lépcsői igen bizonytalanok, a felső lépcsők igen biztonságosak. A gond csak az, hogy összekeveredik a kockázat alatti döntés a bizonytalanság alatti döntéssel. Vagyis annak feltételezése, hogy ismerjük és stabil az eloszlás, vagy ahogyan ezt a CDO nyelvben mondták a korreláció. A tényleges "valóság" azonban teljesen más volt és a modellek szemléleti kiindulásuk miatt hibásak voltak és a szereplők saját tudásuk és prekoncepcióik, "arcuk" áldozatául estek.

A CDO árazás mint a kockázat melletti döntés zsákutcája

There was, however, a niggling problem: The running premiums on these insurance contracts ate into the short-term returns of Howie's group. "The group was supposed to make two billion dollars a year," said one member. "And we had this credit default swap position that was costing us two hundred million dollars." To offset the running cost, Hubler decided to sell some credit default swaps on triple-A-rated subprime CDOs, and take in some premiums of his own.* The problem was that the premiums on the supposedly far less risky triple-A-rated CDOs were only one-tenth of the premiums on the triple-Bs, and so to take in the same amount of money as he was paying out, he'd need to sell credit default swaps in roughly ten times the amount he already owned. He and his traders did this quickly, and apparently without a great deal of discussion, in half a dozen or so massive trades, with Goldman Sachs and Deutsche Bank and a few others.

A CDO árazás mint a kockázat melletti döntés zsákutcája

What do you mean seventy? Our model says they are worth ninety-five, said one of the Morgan Stanley people on the phone call.
Our model says they are worth seventy, replied one of the Deutsche Bank people.
Well, our model says they are worth ninety-five, repeated the Morgan Stanley person, and then went on about how the correlation among the thousands of triple-B-rated bonds in his CDOs was very low, and so a few bonds going bad didn't imply they were all worthless.
At which point Greg Lippmann just said, Dude, fuck your model. I'll make you a market. They are seventy-seventy-seven. You have three choices. You can sell them back to me at seventy. You can buy some more at seventy-seven. Or you can give me my fucking one point two billion dollars.

A modern pénzügyek alapképlete

Az árazási formula szerint az árazó függvény

$$\pi\left(\xi_T\right) = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\xi_T\right)}{R_T}$$

ahol az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ a piaci szereplők hasznossági függvényeitől és az R diszkontfüggvénytől függő kockázatsemleges mérték. Mivel a **Q** közvetlenül nem figyelhető meg, ezért a **Q** meghatározása piaci adatok alapján történik a kalibrálás során, így mégis kockázatról és nem bizonytalanságról.van szó.
A módszer lényege, hogy a kalibrálással statisztikailag következtetünk a megfigyelhetetlen, de stabilnak feltételezett hasznossági függvényekre, illetve feltesszük, hogy a **Q** stabil és egyszerűen függ a kereslet kínálattól.

Indoklás

A pénzügyek alapfeltevése, hogy nincsenek tranzakciós költségek. Ezért

$$\pi\left(c_1\xi_1 + c_2\xi_2\right) = c_1\pi\left(\xi_1\right) + c_1\pi\left(\xi_2\right).$$

A **Q** a π mértéket reprezentáló mérték normalizálása.. Semmi köze a relatív gyakoriságokhoz.

$$\begin{aligned}\pi\left(\xi\right) &= \int_\Omega \xi d\mu = \frac{\mu\left(\Omega\right)}{\mu\left(\Omega\right)}\int_\Omega \xi d\mu = \\ &= \mu\left(\Omega\right)\int_\Omega \xi d\frac{\mu}{\mu\left(\Omega\right)} \mathrel{\mathring{=}} \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\xi\right)}{R.}\end{aligned}$$

A teljesség problémája

Mivel a χ_E alakú kifizetések az úgynevezett Arrow–Debreu termékek nem léteznek, ezért a kiterjesztés nem egyértelmű. A π funkcionált előbb ki kell terjeszteni a χ_E alakú kifizetésekre.

- A kiterjesztés létezik, de nem egyértelmű.
- Nem teljes piacokon az ár nem származtatható még fedezésből sem.

Mértékcsere mint a módszer lényege

A modellépítés során a legfőbb probléma

- Matematikailag az a kérdés, hogy milyen tulajdonságok maradnak invariánsak a mértékcsere során?
- A valós mérték alatti valószínűségszámítási intuíció működik-e a kicserélt mértékre?
- Mennyiben használható a valószínűségszámítási kép, illetve mennyire része a problémának?

Mértékcsere mi az ami invariáns

Theorem

A mértékcsere során ivariáns a szemi-martingál tulajdonság,.a sztochasztikus integrál, az arbitrázs.

Theorem (Artzner-Delbaen)

Ha egy N számláló folyamat N^p kompenzátora $N^p(t) = \int_0^t \lambda_s ds$ alakú, akkor ez a tulajdonság invariáns az ekvivalens mértékcserére, vagyis tetszőleges ekvivalens mértékcsere után az N intenzitása alkalmas φ előrejelezhető folyamattal $\lambda\varphi$ módon írható.

Az N^p definíció szerint az az egyetlen előrejelezhető, növekedő folyamat, amelyre az $M \stackrel{\circ}{=} N - N^p$ lokális martingál. Az N^p szokásos neve kompenzátor, ugyanis egy martingál erejéig kompenzálja az N-ben levő kockázatot. Mivel az N^p folytonos, az N ugrásai nem előrejelezhetőek.

Girszanov tétel intenzitás alapú folyamatokra

Technikailag a probléma mindig az, hogy a Girszanov-féle tételek általában sem nem szükségesek, sem nem elégségesek az összes ekvivalens mértékcsere leírásához.

Theorem

Jelölje (τ_i) *az* N *ugrásainak időpontját. Ha a* φ *egy olyan előrejelezhető folyamat, amelyre* $\int_0^t \lambda_s \varphi_s ds < \infty$, *akkor a*

$$\Lambda_t = \exp\left(\int_0^t (1-\varphi_s)\lambda_s ds\right) \prod_{\tau_i \le t} \varphi(\tau_i)$$

Vagy ami ugyanaz $\Lambda = 1 + \Lambda_- \bullet ((\varphi - 1) \bullet M)$ *lokális martingál. Ha a* Λ *egyenletesen integrálható martingál, akkor a* $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \Lambda(\infty)$ *mértékcsere után az* N *intenzitása* $\lambda\varphi$ *lesz.*

Bizonyítás

Be kell látni, hogy $\Lambda(t)\left(N(t)-\int_0^t \lambda_s\varphi_s ds\right)$ lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt.

$$\Lambda(t)\left(N(t)-\int_0^t \lambda_s\varphi_s ds\right)=\int_0^t\left(N(s)-\int_0^s \lambda_u\varphi_u du\right)d\Lambda(s)+$$
$$+\int_0^t \Lambda(s)\,d\left(N(s)-\int_0^s \lambda_u\varphi_u du\right)+\left[\Lambda, N-\int \lambda_u\varphi_u du\right](t)=$$
$$L_1+L_2-\int_0^t \Lambda(s)\,d\int_0^s \lambda_u(\varphi_u-1)\,du+$$
$$+\left[\int \Lambda_-(\varphi-1)\,dM, N-\int \lambda_u\varphi_u du\right](t)=$$
$$=L_1+L_2+K-K^p.$$

ami lokális martingál.

Bizonyítás

Ugyanis

$$
\begin{aligned}
&\left[\int \Lambda_{-}(\varphi-1)\,dM, N-\int \lambda_u \varphi_u du\right]^p = \\
&= \left(\int \Lambda_{-}(\varphi-1)\,d[N]\right)^p = \\
&= \int \Lambda_{-}(\varphi-1)\,d[N]^p = \int \Lambda_{-}(\varphi-1)\,\lambda_s ds = \\
&= \int \Lambda(\varphi-1)\,\lambda_s ds.
\end{aligned}
$$

Egy példa

Legyen N Poisson-folyamat. A Λ nem negatív lokális martingál, így szupermartingál, következésképpen ha nem veszti a várható értéket, akkor valódi martingál. Vegyünk egy φ konstanst

$$\mathbf{E}\left(\Lambda_t\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(\int_0^t \left(1-\varphi_s\right)\lambda_s ds\right)\prod_{\tau_i \leq t}\varphi\left(\tau_i\right)\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda t - t\varphi\lambda\right)\varphi^N\right) = \exp\left(\lambda t - t\varphi\lambda\right)\sum_{k=0}^{n}\varphi^k \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}\exp\left(-\lambda t\right) =$$

$$= \exp\left(\lambda t - t\varphi\lambda\right)\exp\left(\varphi\lambda t\right)\exp\left(-\lambda t\right) = 1.$$

Vagyis alkalmas mértékcserével a Poisson-folyamat intenzitása bármire kicserélhető. A statisztikailag megfigyelt intenzitás használható információt nem ad.

Egy másik példa

Legyen φ p_u valószínűségekkel φ_u, és tegyük fel, hogy az N független a φ-től. Ekkor

$$\mathbf{E}\left(\Lambda_t\right) = \sum_u \mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda t - t\varphi_u\lambda\right)\varphi_u^N\right) p_u = 1$$

Duplán sztochasztikus folyamatok

Theorem

Ha az N duplán sztochasztikus, akkor a definícióból, illetve a teljes várható érték tételből

$$\mathbf{P}\left(N\left(t\right)-N\left(s\right)=k\mid\mathcal{F}_{s}\right)=\mathbf{E}\left(\frac{\left(\int_{s}^{t}\lambda_{u}du\right)^{k}}{k!}\exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda_{u}du\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)..$$

$$L_{s,t}\left(u\right)=\mathbf{E}\left(\exp\left(-u\left(N\left(t\right)-N\left(s\right)\right)\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda_{u}du\cdot\left(1-\exp\left(-u\right)\right)\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)\stackrel{\circ}{=}$$

$$\stackrel{\circ}{=}\mathbf{E}\left(\exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda_{u}du\cdot\psi\left(u\right)\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right).$$

A baj csak az, hogy a mértékcsere során a duplán sztochasztikus jelleg nem marad meg. Mit lehet mondani általában az intenzitás alapú modellekre?

Még egy mértékcsere

Theorem

Legyen $\psi(u) = 1 - \exp(-u)$. *A*

$$\Lambda(u) \overset{\circ}{=} \exp\left(\psi(u) \cdot N^p - u \cdot N\right)$$

lokális martingál. Ha feltesszük, hogy $\mathbf{E}\left(\exp\left(N_T^p\right)\right) < \infty$, *akkor a* Λ *egyenletesen integrálható a* $[0, T]$ *szakaszon, így használható mértékcserére.*

Még egy mértékcsere

A Λ kielégíti a

$$\Lambda(t) = 1 - \psi(u) \int_0^t \Lambda(s-)\, dM(s)$$

egyenletet. A Doléans-formula szerint

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \exp\left(-\psi(u)\left(M - M(0) - \frac{1}{2}[M]^c\right)\right) \prod (1 - \psi(u)\Delta M) \exp(\psi(u
\\
&= \exp(-\psi(u)(N - N^p)) \prod (1 - \psi(u)\Delta N) \exp(\psi(u)\Delta N) = \\
&= \exp(\psi(u) N^p) \prod (1 - \psi(u)\Delta N) = \exp(\psi(u) N^p) \exp(-u \cdot N).
\end{aligned}$$

Még egy mértékcsere

$$
\begin{aligned}
L_{s,t}(u) &= \mathbf{E}\left(\exp\left(-u\left(N(t)-N(s)\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp\left(-u\left(N(t)-N(s)\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp\left(-\psi(u)\left(N^p(t)-N^p(s)\right)\right)\frac{\Lambda_t}{\Lambda_s} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \frac{1}{\Lambda_s}\mathbf{E}\left(\exp\left(-\psi(u)\left(N^p(t)-N^p(s)\right)\right)\Lambda_t \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}^u\left(\exp\left(-\psi(u)\left(N^p(t)-N^p(s)\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \mathbf{E}^u\left(\exp\left(-\psi(u)\int_s^t \lambda_s ds\right) \mid \mathcal{F}_s\right).
\end{aligned}
$$

Egy egyszerű számolás

$$\int_F \xi d\mathbf{Q} = \int_F \xi \Lambda_t d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\xi \Lambda_t \mid \mathcal{F}_s \right) d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\xi \Lambda_t \mid \mathcal{F}_s \right) \Lambda_s^{-1} d\mathbf{Q}$$

következésképpen

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\xi \mid \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\xi \Lambda_t \mid \mathcal{F}_s \right) \Lambda_s^{-1}.$$

Duplán sztochasztikus folyamatok

Ha N duplán sztochasztikus, akkor

$$\mathbf{E}^{u}\left(\exp\left(-v\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\frac{\Lambda_{t}}{\Lambda_{s}}\exp\left(-v\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\frac{\exp\left(\psi\left(u\right)N^{p}\left(t\right)\right)\exp\left(-u\cdot N\left(t\right)\right)}{\exp\left(\psi\left(u\right)N^{p}\left(s\right)\right)\exp\left(-u\cdot N\left(s\right)\right)}\exp\left(-v\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\exp\left(-u(N\left(t\right)-N\left(s\right)\right)\exp\left(-\left(v-\psi\left(u\right)\right)\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\exp\left(-u(N\left(t\right)-N\left(s\right)\right)\mid\mathcal{F}_{s}\vee\mathcal{G}_{s}\right)\exp\left(-\left(v-\psi\left(u\right)\right)\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\mid\right.$$

$$=\mathbf{E}\left(\exp\left(-\psi\left(u\right)\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\exp\left(-\left(v-\psi\left(u\right)\right)\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\exp\left(-v\int_{s}^{t}\lambda_{s}ds\right)\mid\mathcal{F}_{s}\right)$$

Kérdések

1. Igaz-e az integrálreprezentációs tétel intenzitással rendelkező pontfolyamatokra?
2. A Girzsanov-formula szükséges és elegendő?
3. Mit tudunk a Markov-tulajdonság és a mértékcsere kapcsolatáról?
4. Hogyan lehetne a kiterjesztési tételt pontosabbá tenni?