Erasmus MC

ÉLETTARTAM KOCKÁZAT

A nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher

Májer István - Kovács Erzsébet

i.majer@erasmusmc.nl

Erasmus MC

Tartalom

1. VÁRHATÓ ÉLETTARTAM

Születéskor várható élettartam, 1970-2008

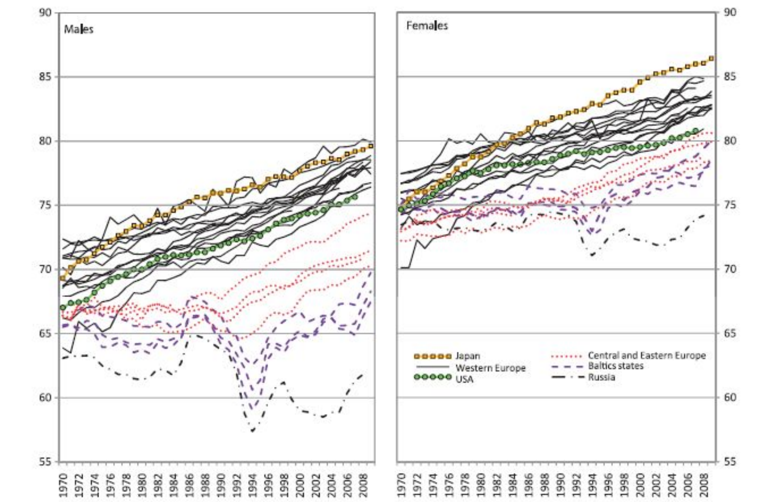
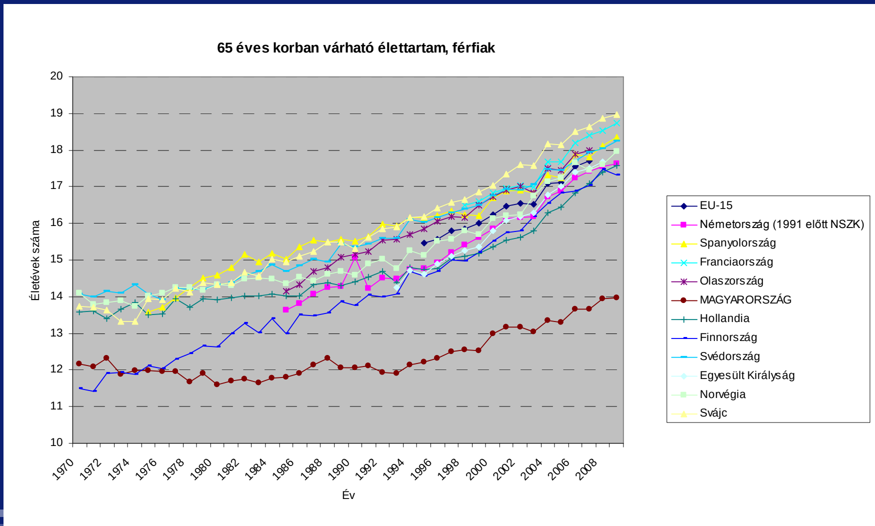
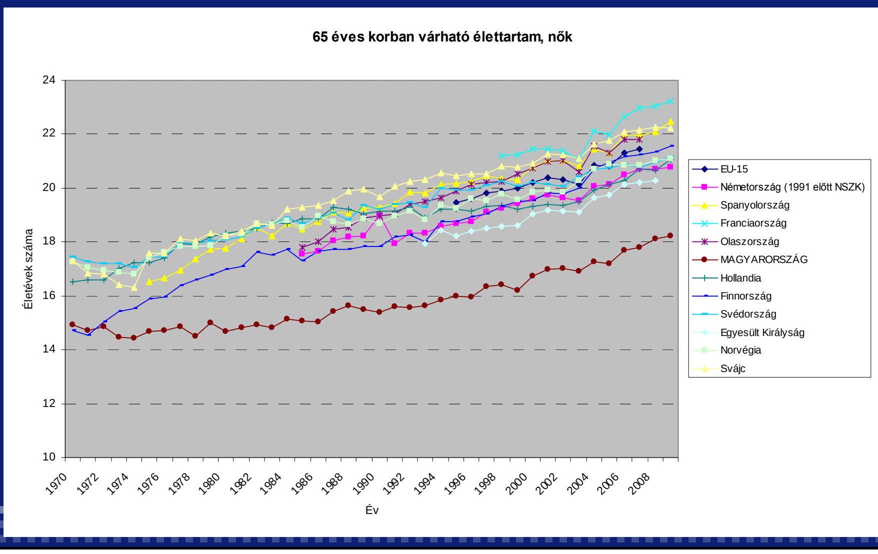


Figure 1 Trends in life expectancy at birth (years) for selected countries by sex, 1970–2009. *Sources*: (i) WHO Health for All Database: Belgium, Finland, France, Germany, Greece, Iceland, Ireland, Netherlands, Norway, Spain, Sweden, UK, Czech republic and Hungary. (ii) Human Mortality Database: Denmark, Italy, Portugal, Estonia, Latvia, Lithuania, Poland, Russia, Slovakia, Japan and USA

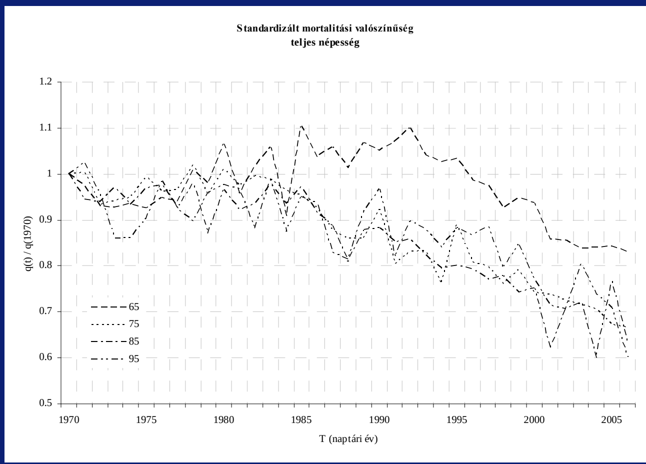
65 éves korban várható férfi élettartam, 1970-2008



65 éves korban várható női élettartam, 1970-2008



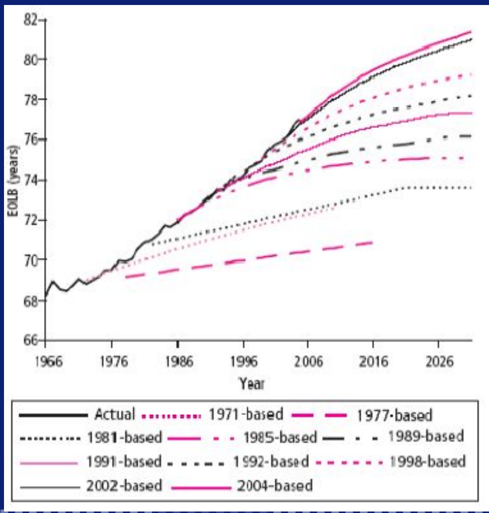
Indexált mortalitási valószínűség, 1970-2008



Legfontosabb tényezők

- Orvostudomány fejlődése (technológiai fejlődés és annak elterjedése)
- Gazdasági változások (fejlődés)
- Életmód változása (dohányzás, testmozgás)
- Szabályok (pl. biztonságosabb közlekedés)

Hivatalos mortalitási várakozások „pontossága”
Megfigyelt és előre jelzett születéskor várható élettartam , EK, férfiak, 1966-2031



Rekord várható élettartam alakulása

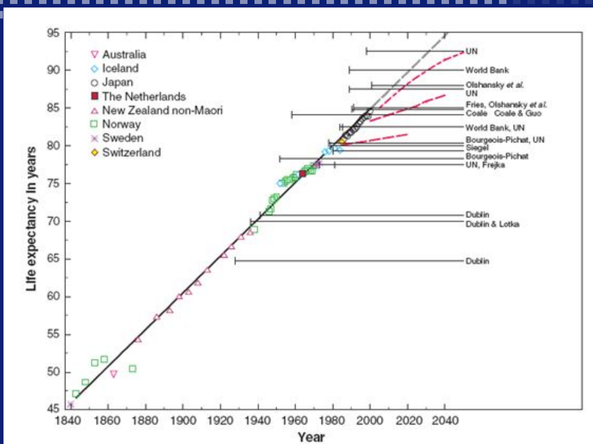


Fig. 1. Record female life expectancy from 1840 to the present [suppl. table 2 (1)]. The linear-regression trend is depicted by a bold black line (slope = 0.243) and the extrapolated trend by a dashed gray line. The horizontal black lines show asserted ceilings on life expectancy, with a short vertical line indicating the year of publication (suppl. table 1). The dashed red lines denote projections of female life expectancy in Japan published by the United Nations in 1986, 1999, and 2001 (1): It is encouraging that the U.N. altered its projection so radically between 1999 and 2001.

Mi várható a jövőben?

- Optimista vs. Pesszimista álláspontok
- Bizonytalanság szerepének modellezése felértékelődött
- A mortalitás változása („trendje”) egy sztochasztikus folyamat
- Sztochasztikus extrapolatív modell -> Lee és Carter [1992]

2. A LEE-CARTER MODELL

Halálozási ráta, halálozási valószínűség

Halálozási ráta = $m_{x,t}^{(g)} = D_{x,t}^{(g)} / E_{x,t}^{(g)}$

Halálozási valószínűség = $q_{x,t}^{(g)} = \dfrac{m_{x,t}^{(g)}}{1 + \frac{1}{2} m_{x,t}^{(g)}}$

Halálozási törvények

- Gompertz [1825], Makeham [1860]
- Heligman-Pollard törvény [1980]

$$\tilde{q}_x = A^{(x+B)^C} + D\exp(-E(\log x - \log F)^2) + \frac{GH^x}{1+GH^x}$$

- Probléma: túl sok és instabil paraméter → előrejelzés gyakorlatilag lehetetlen

A Lee-Carter modell

$$\ln m_{x,t}^{(g)} = \alpha_x^{(g)} + \beta_x^{(g)} \kappa_t^{(g)} + \varepsilon_{x,t}^{(g)}$$

- Kis számú paraméter
- A gyakorlatban nagyon jól működik
- „a mortalitás előrejelzéséhez használt módszerek közül a vezető statisztikai modellé vált” - Deaton [2004]

A Lee-Carter modell alkalmazása

$$\ln m_{x,t}^{(g)} = \alpha_x^{(g)} + \beta_x^{(g)} \kappa_t^{(g)} + \varepsilon_{x,t}^{(g)}$$

- 3 lépés:
- 1. lépés: a modell paramétereinek becslése: $\hat{\alpha}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{\kappa}_t$
- 2. lépés: a $\hat{\kappa}_t$ paraméter kiigazítása
- 3. lépés: a mortalitási ráták előrejelzése

1. lépés: Paraméterek becslése (1)

$\ln m_{x,t}^{(g)} = \alpha_x^{(g)} + \beta_x^{(g)}\kappa_t^{(g)} + \varepsilon_{x,t}^{(g)}$

A reziduumok négyzetét szeretnénk minimalizálni

$\ln(m_{x,t}^{(g)}) - \alpha_x^{(g)}$ = $\beta_x \kappa_t$ mátrix sajátérték felbontása

Tipikusan csak az első sajátértéket használjuk

Két korlát bevezetése: $\sum_x \beta_x^{(i)} = 1$, $\sum_t \kappa_t^{(i)} = 0$ ($\tilde{a} - \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{b}(\tilde{k} + \tilde{c}) = \tilde{a} + \tilde{b}\tilde{k}$)

1. lépés: Paraméterek becslése (2)

$\hat{\alpha}_x^{(g)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \ln(m_{x,t}^{(g)})}{T}$: a megfigyelt mortalitási ráták átlaga

$\hat{\kappa}_t^{(g)} = \sigma_1^{(g)} v_1^{(g)}(t) \sum_{x\in X} u_1^{(g)}(x)$: látens folyamat, amely a mortalitás szintjének alakulását számszerűsíti

$\hat{\beta}_x^{(g)} = \frac{u_1^{(g)}(x)}{\sum_{x\in X} u_1^{(g)}(x)}$: érzékenység paraméter

Erasmus MC

2. lépés: A látens paraméter kiigazítása

$$\sum_x D_{x,t} = \sum_x \left[E_{x,t} \exp\left(\hat{\alpha}_{x,t} + \hat{\beta}_x \tilde{\kappa}_t \right) \right]$$

- Célja: A megfigyelt és modellezett halálozások száma megegyezzen
- Miért? Mert az eredeti modell becslésekor a fiatal korok mortalitási rátái ugyanolyan súllyal szerepelnek, mint az idős korok rátái („újrasúlyozás”)

Erasmus MC

3. lépés: Az előre jelzés (1)

Tekintsünk a $\tilde{\kappa}_t = \left[\tilde{\kappa}_1^{(i)}, \tilde{\kappa}_2^{(i)}, \ldots, \tilde{\kappa}_t^{(i)} \right]^T$ értékekre, mint idősorra!

Illesszünk rá ARIMA modellt

A legtöbb alkalmazásban ARIMA(0,1,0) véletlen bolyongás (*random walk*) modellt találunk.

Ekkor: $\tilde{\kappa}_t = \tilde{\kappa}_{t-1} + \theta + \delta_t$ illetve $\delta_t \sim N(0, \delta^2)$

, ahol θ a trend paraméter, δ_t pedig fehér zaj.

Erasmus MC

3. lépés: Az előre jelzés (2)

- Θ becslőfüggvénye: $\hat{\theta} = \frac{\tilde{\kappa}_T - \tilde{\kappa}_1}{T-1}$

- δ becslőfüggvénye: $\hat{\delta}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1}\left(\tilde{\kappa}_{t+1} - \tilde{\kappa}_t - \hat{\theta}\right)^2$

- A standard hiba pedig: $\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right) = \frac{\hat{\delta}}{T-1}$

Erasmus MC

3. lépés: Az előre jelzés (3)

Szimuláljunk *B* darab idősort *s* évre előre (Box-Jenkins)

$\hat{\kappa}_{T+s} \left| \hat{\kappa}_{T+s-1}, \hat{\theta} \sim N\left(\hat{\kappa}_{T+s-1} + \hat{\theta}\ , \hat{\delta}^2\right)\right.$

A következő évi κ_{T+s} az előző évre szimulált κ_{T+s-1} és a trend függvénye

Ha a trend paraméter, θ, körüli bizonytalanságot is be szeretnénk vonni a modellbe, akkor θ-t a fenti képletben $\theta \sim N\left(\hat{\theta}, \mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)\right)$-tal helyettesítjük.

Végezetül: $\hat{m}_{x,T+s} = m_{x,T} \times \exp\left(\hat{\beta}_x \times \left(\tilde{\kappa}_{T+s}^{(i)} - \tilde{\kappa}_T^{(i)}\right)\right)$

További lépések

A szimulált mortalitási rátákat átalakítjuk 1-éves mortalitási valószínűségekké

Az 1-éves mortalitási valószínűséget felhasználva kiszámítjuk a várható élettartamot egy adott *x* éves korra (halandósági tábla)

Ezt megismételjük minden *b.* szimuláció során

3. ALKALMAZÁS

Adatok

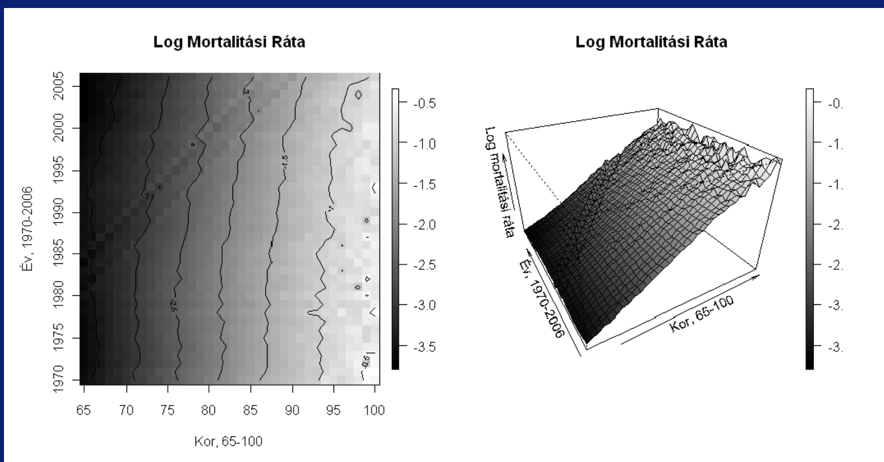
Magyar mortalitási ráták: $m_{x,t}$

$t = \{1970, \ldots, 2006\}$

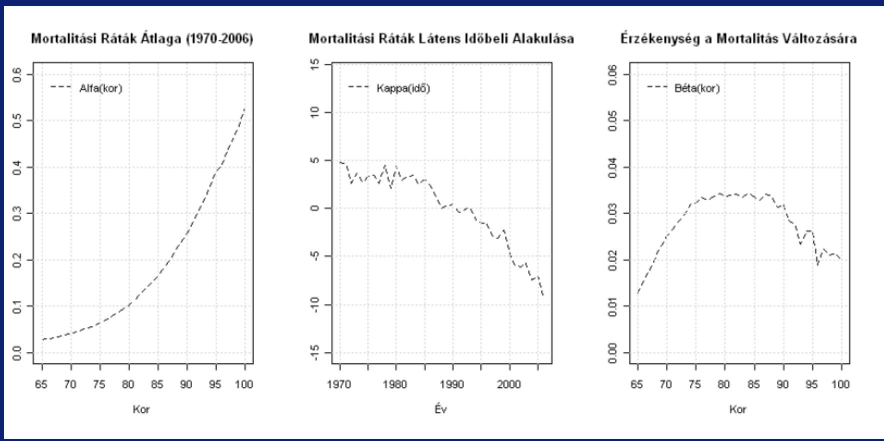
$x = \{65, \ldots, 97+\}$

Human Mortality Database (szabadon elérhető adatbázis)

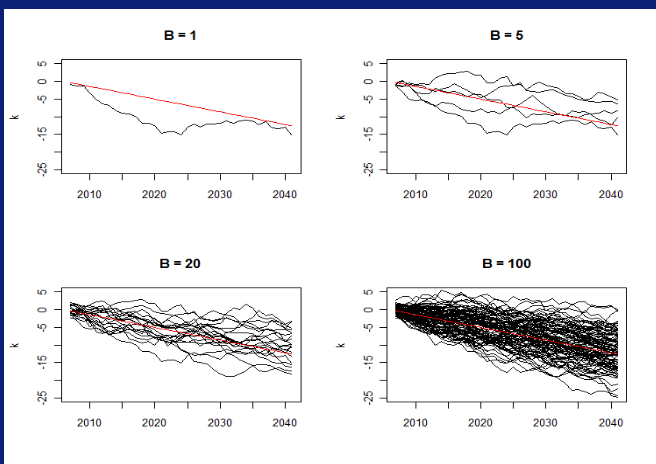
Log mortalitási ráta



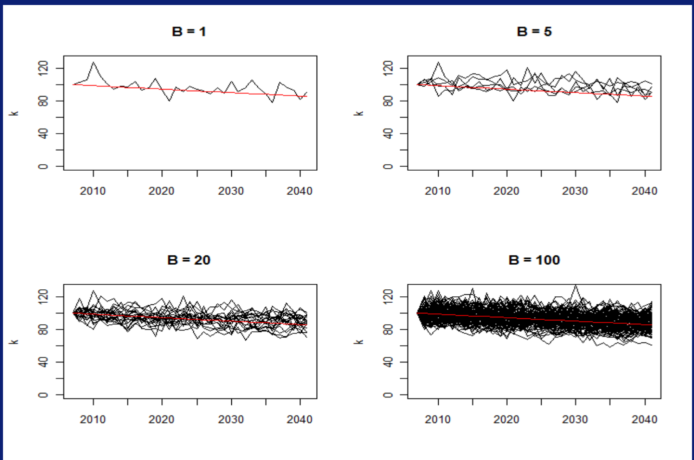
Lee-Carter modell becsült paraméterei



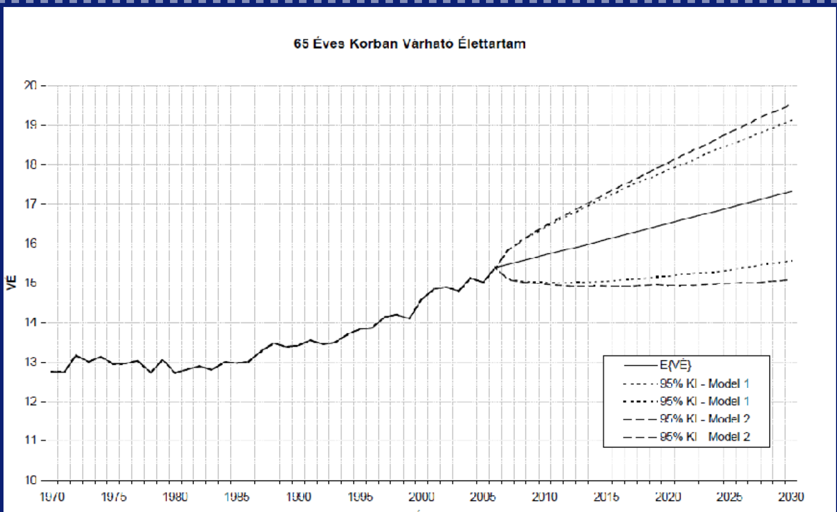
Szimulált κ_{T+s}



Szimulált $m_{65,T+s}$



Várható élettartam 10,000 szimuláció alapján



Erasmus MC

4. KÖVETKEZTETÉSEK

Erasmus MC

Miért fontos ez?

Bármilyen (pénzügyi) termék, amelynek a (jelen)érteke a mortalitási viszonyok függvénye bizonytalan. Pl. életbiztosítás, nyugdíj

Egyéni halálozási kockázat: diverzifikálható

Élettartam kockázat: a halandóság (és az attól függő más mennyiségek, mint például a várható élettartam) hosszú távon eltér annak előre jelzett mértéktől, trendjétől.

Várható élettartam kockázat figyelembe vétele

Jellemzően a várható élettartamot keresztmetszeti szemléletben értelmezzük:

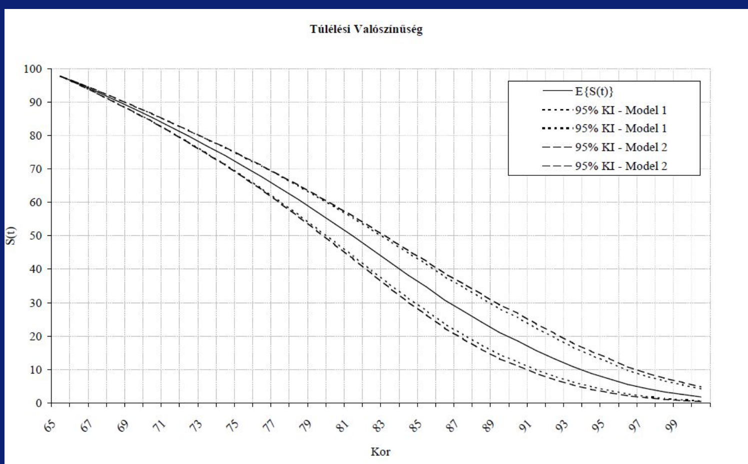
$$ {}_{\tau}p_x = \prod_{j=0}^{\tau-1} p_{x+j} \qquad e_x = \sum_{\tau \geq 1} {}_{\tau}p_x $$

A nyugdíjbiztosítók kockázata azonban „kohorsz” szemléletben értelmezendő.

$$ {}_{\tau}p_{x,t}^{(g)} = p_{x,t}^{(g)} \cdot p_{x+1,t+1}^{(g)} \cdot \ldots \cdot p_{x+\tau-1,t+\tau-1}^{(g)} $$

$$ e_{x,t}^{(g)} = \sum_{\tau \geq 1} {}_{\tau}p_{x,t}^{(g)} $$

Halálozási valószínűség – kohorsz szemléletben



Erasmus MC

Túlélési valószínűség – Keresztmetszeti vs. Kohorsz

1. Táblázat: Túlélési valószínűségek 65, 70, 75, 80 és 85 éves korban. Keresztmetszeti versus kohorsz egy-éves túlélési valószínűségek

	Keresztmetszeti (2006)	Kohorsz (2006-2041)		
Életkor	p(t)	Várható Érték, E[p(t)]	95% KI, Modell 1	95% KI, Modell 2
65	97,77	97,77	-	-
70	96,92	97,20	96,91-97,47	96,90 – 97,47
75	95,17	96,28	95,58-96,87	95,51 – 96,92
80	92,33	94,14	92,76-95,30	92,48 – 95,44
85	88,31	90,84	88,42-92,83	87,71 – 93,17
90	84,49	86,97	83,50-89,73	82,37 – 90,34

Jegyzetek:
[1] p(t): egy-éves túlélési valószínűség, amely azt a valószínűséget mutatja, hogy egy x éves személy életben lesz x+1 éves korában.
[2] Várható érték: Determinisztikus modellel kapott becslés
95% KI: 95%-os konfidencia intervallum
[3] Determinisztikus modell: ez a modell úgy tekint a mortalitási index jövőbeli értékeire, mintha azokat biztosan tudnánk (a múltbéli adatok alapján)
[4] Modell 1: ez a modell figyelembe veszi, hogy a mortalitási index jövőbeli alakulása bizonytalan, adott trend esetén
[5] Modell 2: ez a modell figyelembe veszi, hogy a mortalitási index jövőbeli alakulása bizonytalan és maga a trend is egy valószínűségi változó

Erasmus MC

Annuitás értéke – Keresztmetszeti vs. Kohorsz

2. táblázat: Várható élettartam és várható élettartam pénzügyi kockázata

Várható élettartam				Annuitás jelenértéke			
Keresztmetszeti (2006)	Kohorsz (2007-2042)			Keresztmetszeti (2006)	Kohorsz (2007-2042)		
Várható Érték	Várható Érték	95% KI, Modell 1	95% KI, Modell 2	Várható Érték	Várható Érték	95% KI, Modell 1	95% KI, Modell 2
15,39	16,43	15,35-17,59	15,12–17,83	11,87	12,43	11,82-13,05	11,70–13,17

Jegyzetek:
[1] 3%-os kamatlábat feltételezve
[2] Várható érték: Determinisztikus modellel kapott becslés
[3] 95% KI: 95%-os konfidencia intervallum
[4] Determinisztikus modell: ez a modell úgy tekint a mortalitási index jövőbeli értékeire, mintha azokat biztosan tudnánk (a múltbéli adatok alapján)
[5] Modell 1: ez a modell figyelembe veszi, hogy a mortalitási index jövőbeli alakulása bizonytalan, adott trend esetén
[6] Modell 2: ez a modell figyelembe veszi, hogy a mortalitási index jövőbeli alakulása bizonytalan és maga a trend is egy valószínűségi változó

Végső megjegyzések

- „Modern” Lee-Carter modellek (homoszkedasztikus reziduumok):
  - Binomiális
  - Poisson
  - Spline

- Köszönöm a figyelmet!