A zsugori bank

Csiszár Villő Gerencsér Balázs Tusnády Gábor

XVIII.Altenburger Gyula Szimpózium, 2008. május 24.

A zsugori bank feladata

- Adatok: $1 < q < Q$ valós
  $1 \leq T$ egész
  $x_1, x_2, \ldots, x_T$ valós (lehet ismert vagy ismeretlen)
  $w_0 = 0$, z_0 valós
- Keresett: $y_1, y_2, \ldots, y_T$ valós

A zsugori bank feladata - folyt.

- Egyenletek: $t = 1, 2, \ldots, T$-re
  $z_t = z_{t-1} + x_t - y_t$
  $w_t = q w_{t-1} + h(y_t)$,
  ahol $h(y) = \begin{cases} Qy & \text{ha } y < 0 \\ y & \text{ha } y \geq 0 \end{cases}$
- Kényszerfeltétel: $z_t \geq 0 \;\; t = 1, 2, \ldots T$-re
- Cél: $\mathbb{E}(z_T + w_T) \longrightarrow max$

Pénzfelvétel általános elve

- Legyen $u_t = z_{t-1} + x_t$
- Ha $u_t < 0$, akkor $y_t = u_t$
- Ha $u_t \geq 0$, akkor $y_t \geq 0$

Ismert pénzforgalom - jelölések

- Legyen Δ az az egész, melyre $q^{\Delta} \leq Q < q^{\Delta+1}$
- Legyen $A_t = \min\limits_{t<s\leq\min(t+\Delta,T)} \sum\limits_{i=t+1}^{s} x_i$
- Legyen $A_t^- = \begin{cases} 0 & \text{ha } A_t > 0 \\ -A_t & \text{ha } A_t \leq 0 \end{cases}$

Ismert pénzforgalom - optimális stratégia

Ekkor $y_t = \begin{cases} u_t & \text{ha } u_t < 0 \\ 0 & \text{ha } 0 \le u_t \le A_t^- \\ u_t - A_t^- & \text{ha } u_t > A_t^- \end{cases}$ optimális

IID pénzforgalom - elcsábulás

Kérdés:
IID esetén mi mondható a hasonló stratégiáról, ha vesszük A_t^- várható értékét?

IID pénzforgalom - Bellman egyenlet

- Legyen $H = T - t$, és legyen $V_H(u_H)$ az elérhető optimum.
- $V_H(u_H) = \max_{z_H \geq 0}(q^H h(u_H - z_H) + \mathbb{E}V_{H-1}(x_{H-1} + z_H))$

IID pénzforgalom - Bellman egyenlet - folyt.

- Vezessük be a $v_H(u) = q^{-H} V_H(u)$ jelölést, és hagyjuk el a felesleges indexet:
- $v_H(u) = \max_{z \geq 0}(h(u - z) + q^{-1}\mathbb{E}v_{H-1}(x + z))$
- $v_0(u) = h(u)$

IID pénzforgalom - optimális stratégia

Tétel: Ha $\mathbb{E}h'(x) > q$, akkor van olyan monoton növő C_H nemnegatív sorozat, hogy az

$$y_t = \begin{cases} u_t & \text{ha } u_t < 0 \\ 0 & \text{ha } 0 \leq u_t \leq C_{T-t} \\ u_t - C_{T-t} & \text{ha } u_t > C_{T-t} \end{cases}$$

stratégia optimális.

Megjegyzés: $C_H \neq \mathbb{E}A^-_{T-t}$

IID pénzforgalom - csak kiadással

Tétel: Ha $P(x \geq 0) = 0$, akkor

$$\lim_{H \to \infty} v'_H(u) = q^{-1} \max(Q \mathbb{E} q^{-N(u)}, 1),$$

ahol $N(u) = \max\{s : \sum_{i=1}^{s} x_i > -u\}$

IID pénzforgalom - a derivált rekurziója

$$v'_H(u) = \begin{cases} Q & \text{ha } u < 0 \\ q^{-1}\mathbb{E}v'_{H-1}(x+u) & \text{ha } 0 \le u \le C_H \\ 1 & \text{ha } C_H < u \end{cases}$$

ahol

$$C_H = \max(u : Ev'_{H-1}(x+u) \ge q),$$

továbbá $v'_0(u) = \begin{cases} Q & \text{ha } u < 0 \\ 1 & \text{ha } u \ge 0 \end{cases}$

Numerikus példák - paraméterek

- $q = 1.05,\ \ Q = 2,\ \ \Delta = 14$
- Gauss: μ várható értékű 1 szórású normális
- Laplace: μ várható értékű előjelezett $\sqrt{2}$ paraméterű exponenciális
- Negexponenciális: 1 paraméterű exponenciális (-1)-szerese μ-vel eltolva
- d: a $v_\infty(d) = 0$ egyenlet gyöke
- C : C_∞
- C^*: elcsábulás, $\mathbb{E}A^-_{T-\Delta}$

Numerikus példák

Gauss

μ	d	C	C^*
-0.1	6.05	3.72	3.25
0.0	3.50	3.10	2.46
0.1	1.20	2.64	1.82
0.2	-0.45	2.24	1.35

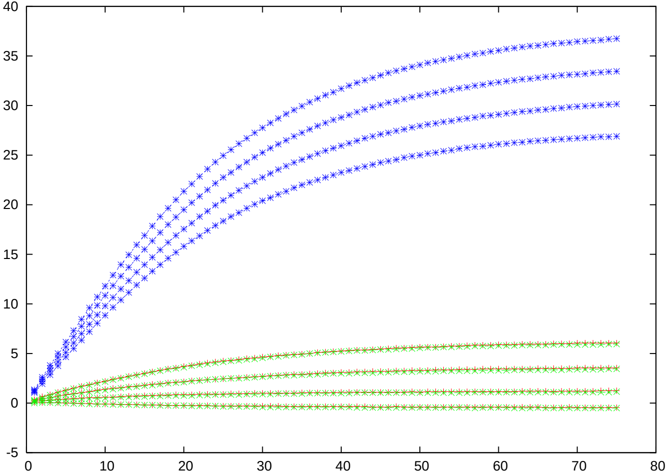
Laplace

μ	d	C	C^*
-0.1	5.95	3.50	3.15
0.0	3.45	2.82	2.35
0.1	1.10	2.34	1.75
0.2	-0.50	2.03	1.26

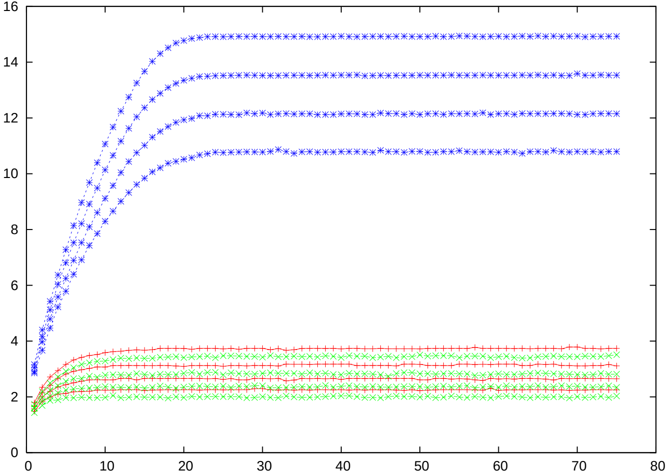
Negexponenciális

μ	d	C	C^*
-0.1	36.77	14.93	15.43
0.0	34.53	13.53	14.00
0.1	30.18	12.15	12.59
0.2	26.90	10.78	11.20

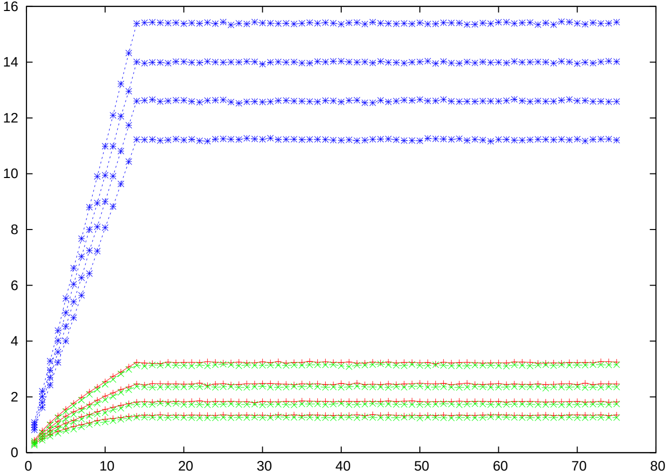
Ábrák - *d*



Ábrák - C



Ábrák - C^*



Irodalom

- Gary D. Eppen - Eugene F. Fama, 1969.
- H.G. Daellenbach, 1971.
- Evan L. Porteus - Edwin H. Neave, 1972.
- S. E. Shreve - H. M. Soner, 1994.
- Janice C. Eberly - Jan A. Van Mieghem, 1997.

Köszönet

Köszönetet mondunk a következőknek:
Vincze István, Bárd Károly, Mosóczy Zoltán, Hanák Gábor, Mályusz Károly, Meszéna György, Krámli András, Michaletzky György, Ispány Márton, Simonovits András, Gerencsér László, Györfi László, Fritz József és Hussami Péter