Sztochasztikus tartalékolás és a tartalék függése a kifutási háromszög időperiódusától

Faluközy Tamás
Vitéz Ildikó Ibolya
Konzulens: Dr. Arató Miklós
ELTE-TTK, Budapest

IBNR, kifutási háromszög

- IBNR: incurred but not reported
- Inkrementális: $C_{i,j}$ – Kumulált: $D_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} C_{i,k}$

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Kifutási háromszög</td><td colspan="5">Bejelentés/Kifizetés késése (+1)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>...</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Bekövet-kezés idő-periódusa</td><td>1</td><td>$D_{1,1}$</td><td>$D_{1,2}$</td><td>...</td><td>...</td><td>$D_{1,n}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$D_{2,1}$</td><td>$D_{2,2}$</td><td>...</td><td>...</td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td>$D_{n,1}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tartalékolási technikák

- Determinisztikus módszerek
  - alsó háromszög kitöltése
  - pontbecslés a tartalékra
- Lánc-létra (kumulált károk)

$$l_j(i) = \frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}}$$ ráták függetlenek *i*-től

$$l_j = \frac{D_{1,j+1} + D_{2,j+1} + \ldots + D_{n-j,j+1}}{D_{1,j} + D_{2,j} + \ldots + D_{n-j,j}}, j = 1,\ldots,n-1$$

Adatok

- Két adatsor (két különböző magyar biztosítótól)
- Lakásbiztosítási (7 éves) – rövidebb kifutás
- KGFB (4 éves) – hosszabb kifutás
- Kifutási háromszög (ált. kumulált):
  - napi/havi/negyedéves/éves
  - kárszámok/károk
  - károk: kifizetési/bejelentési (kifizetés/bejelentés késése szerint)

Különböző eredmények

Célok

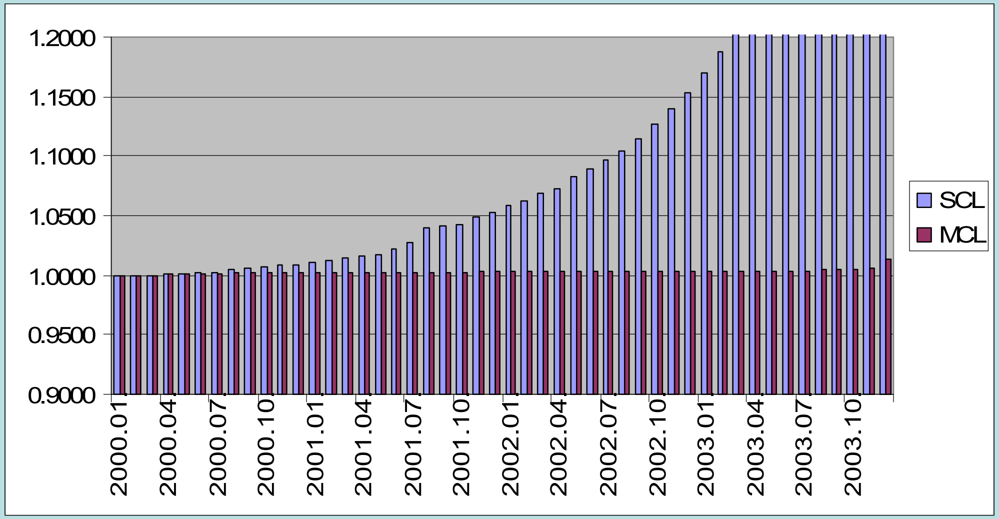
- Müncheni lánc-létra módszer tesztelése (kifizetési/bejelentési háromszög által adott eredmények közti különbség csökkentése)
- A tartalék időperiódustól való függésének vizsgálata
- Sztochasztikus tartalékolási módszerek $\Rightarrow$ tartalék kvantiliseinek meghatározásához

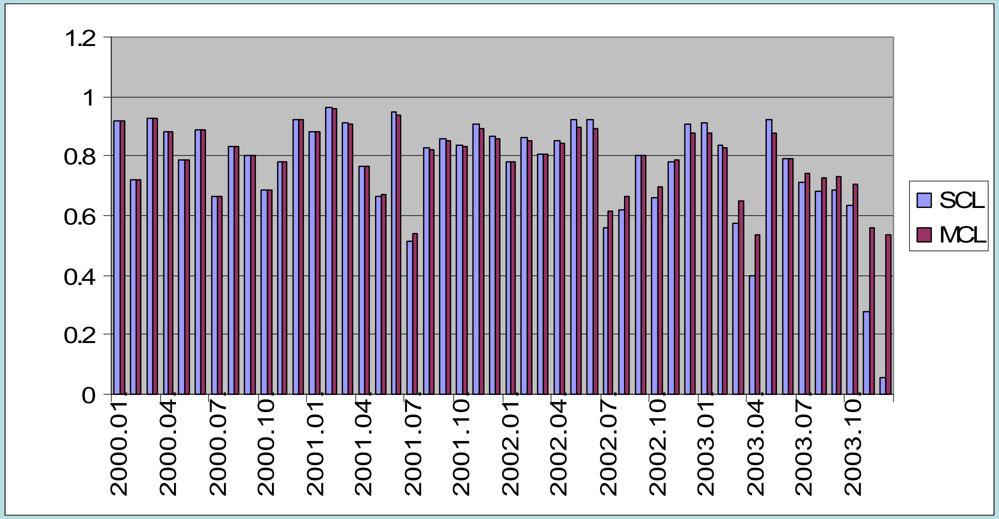
Müncheni lánc-létra (MCL)

- Kárnagyságok (kumulált kifutási háromszög):
  - kifizetési, csak kifizetések (PP)
  - bejelentési, csak kifizetések (IP)
  - bejelentési, kifizetések + tételes függőkártartalék (IPO)
- MCL:
  - PP és IP háromszögek közti eltérés csökkentése
  - Mindkét háromszöget használja, az l_j ráták az aktuális $(P/I)_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{I_{i,j}}$ hányadosoktól függnek

MCL eredmények

- PP – IP arányok a sorok utolsó elemeire (kisebb különbség)
- Probléma: PP és IPO összemérhetők
- PP – IPO ráták (ugyanakkora különbség)
- Ok: különböző input adatok





Determinisztikus/Sztochasztikus

- Sokféle determinisztikus módszer
- Különböző eredmények (pontbecslések)
- Cél: kvantilisek, konfidenciaintervallumok – ehhez sztochasztikus módszerek
- Naiv sztochasztikus technikák
  - l_j: i.i.d. valószínűségi változók (L_j)
  - Tapasztalati eloszlás: diszkrét egyenletes az ismert $l_j(i) = \frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}}$ értékeken

Egyenletes-normális (UN) modell

- L_j változó: diszkrét egyenletes eloszlás a $\left\{ d_j(i) = \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} : i = 1,\ldots,n-j \right\}$ halmazon
- Várható érték: $$E\left(L_j\right) = \frac{1}{t-j} \sum_{i=1}^{n-j} \frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}}$$

az alsó háromszög kitöltése

$$\sum_{j=1}^{n} \left(D_{n-j+1,j} \left(\prod_{k=j}^{n-1} E\left(L_k\right) - 1 \right) \right)$$ a teljes tartalék várható értéke

a szórásnégyzet: $$\sum_{j=1}^{n} \left(D^2_{n-j+1,j} \left(\prod_{k=j}^{n-1} E\left(L_j^2\right) - \prod_{k=j}^{n-1} E^2\left(L_j\right) \right) \right)$$

normális közelítés (várható érték, szórásnégyzet)

kvantilisek – a szórásnégyzet segítségével

UN – megjegyzések Egyenletes-generálás (UG)

- UN:
  - Várható érték: egyik determinisztikus módszer pontbecslése („láncszemhányados átlagokkal”)
  - UN: kvantilisek is adhatók
- UG:
  - L_j valószínűségi változók, mint fent
  - *i*. sor tartaléka: $D_{i,n-i+1} \cdot \left(L_{n-i+1} \cdot L_{n-i+2} \cdot \ldots \cdot L_{n-1} - 1 \right)$
  - teljes tartalék: *(n-1)!(n-2)!...1!* lehetséges érték
  - 1000 lehetséges kimenetel generálása, tapasztalati kvantilisek

MCMC modell

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & Y_1 & Y_2 & & Y_{n-1} & Y_n \\
e_1 & X_1 & C_{1,1} & C_{1,2} & \ldots & C_{1,n-1} & C_{1,n} \\
e_2 & X_2 & C_{2,1} & C_{2,2} & \ldots & C_{1,n-1} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
e_n & X_n & C_{n,1} & & & &
\end{array}
$$

$C_{i,j}$: *i*. periódusban bekövetkezett, *(j-1)* periódussal később bejelentett károk száma

$\sim Poisson(e_i X_i Y_j)$

e_i: *i*. periódusban élő szerződések száma

X_i: egy szerződésre jutó kárszámintenzitás az *i*. periódusban

~ iid, gamma

Y_i: *j-1* periódusnyi késéssel bejelentett károk aránya

$\sim Beta(a,b)$ eloszlás a $\left[0,1-\sum_{k=1}^{j-1} Y_k\right]$ intervallumon

MCMC-tartalékolás

a posteriori eloszlások Bayes-tétellel:

$$\left[\underline{x} \mid \underline{c}, \underline{y}\right] \sim \prod_{i=1}^{n} \left[x_i\right] \cdot \prod_{j=1}^{n-i+1} \left[c_{i,j} \mid x_i, y_j\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\underline{x} \mid \underline{c}, \underline{y}\right] \propto \prod_{i=1}^{n} x_i^{\left(\alpha + \sum_{j=1}^{n-i+1} c_{i,j}\right)-1} \cdot e^{-x_i\left(\lambda + e_i \sum_{j=1}^{n-i+1} y_j\right)}$$

$$\left[\underline{y} \mid \underline{c}, \underline{x}\right] \sim \prod_{j=1}^{n} \left[y_j\right] \cdot \prod_{i=1}^{n-j+1} \left[c_{i,j} \mid x_i, y_j\right]$$

$$\Rightarrow \quad \left[\underline{y} \mid \underline{c}, \underline{x}\right] \propto y_n^{a+b-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} e^{\left(-y_i \sum_{j=1}^{n-i+1} e_j x_j\right)} \cdot y_i^{a-1+\sum_{j=1}^{n-i+1} c_{i,j}} \cdot \frac{1}{\left(1-\sum_{j=1}^{i-1} y_j\right)^{a}}$$

Markov Chain Monte Carlo mintavétel

Metropolis-Hastings módszer;

javaslati eloszlás: $q(.|x) \sim N(x, 0.0001)$

1. mintagenerálás $z \sim q(.|x_t)$

2.

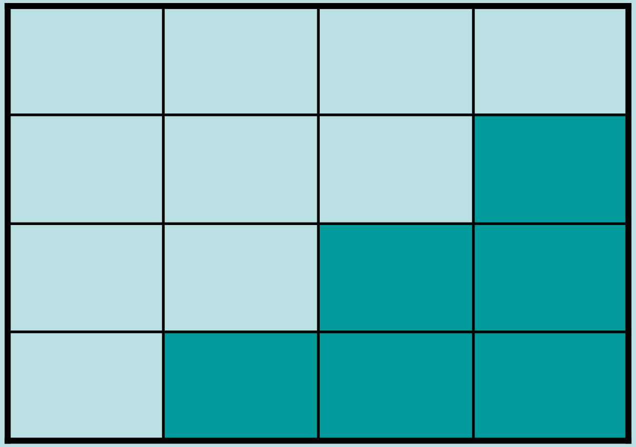
$$x[t+1] = \begin{cases} Z & \alpha \quad vszg. \\ x[t] & 1-\alpha \quad vszg. \end{cases}$$

$$\alpha = \min\left(1, \frac{f(z)}{f(x[t])} \frac{q(x[t]|z)}{q(z|x[t])}\right)$$

MCMC-tartalékolás

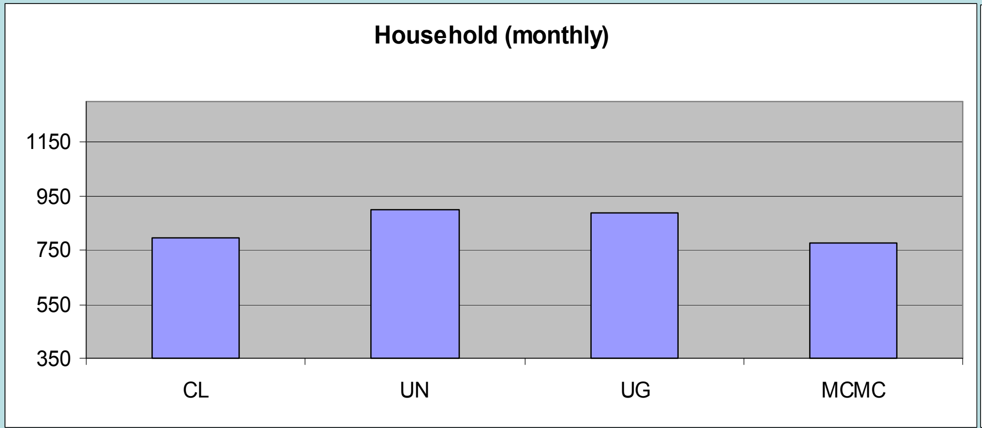
- Minden lépésben
  - 1 minta *x*-re, 1 minta *y*-ra
  - tartalék: Poisson-minta generálása az aktuális *X* és *Y* segítségével számolt paraméterrel*:*

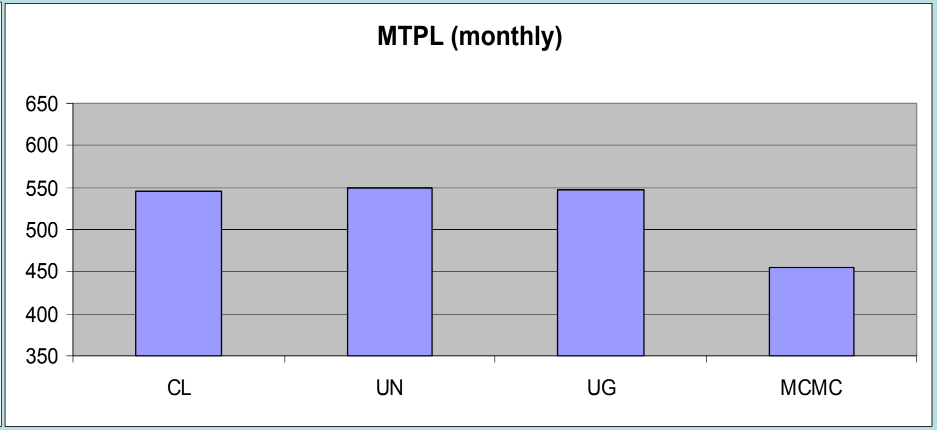
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n-i+2}^{n} e_i x_i y_j$$

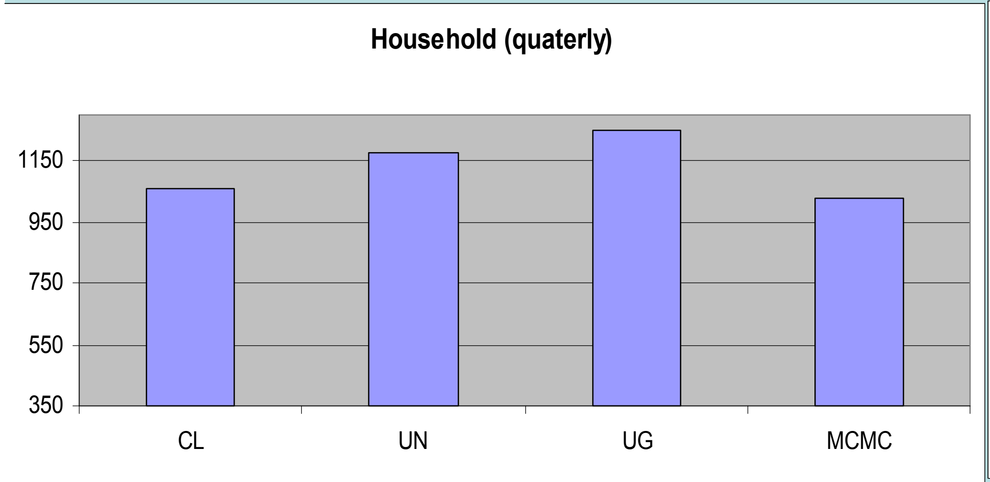


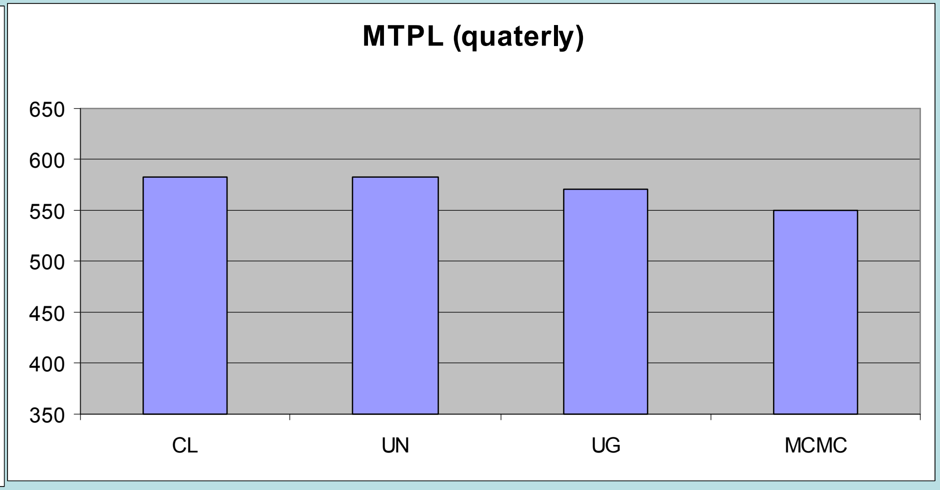
- Várható érték és kvantilisek meghatározása a kapott értékek alapján

Eredmények: pontbecslések

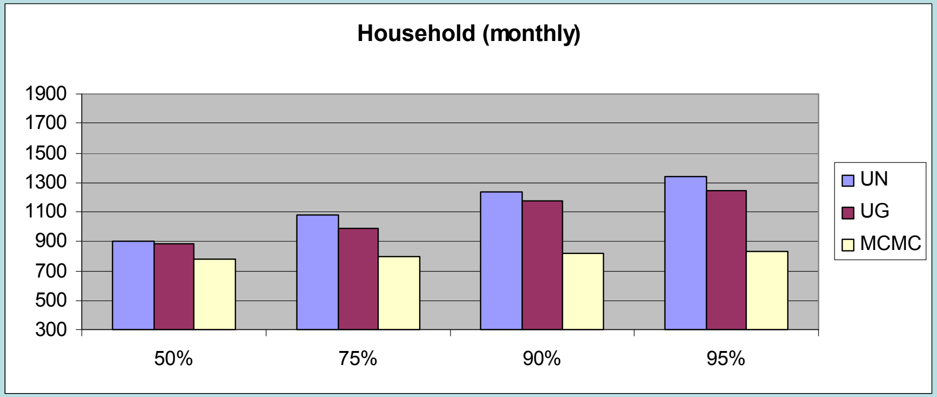


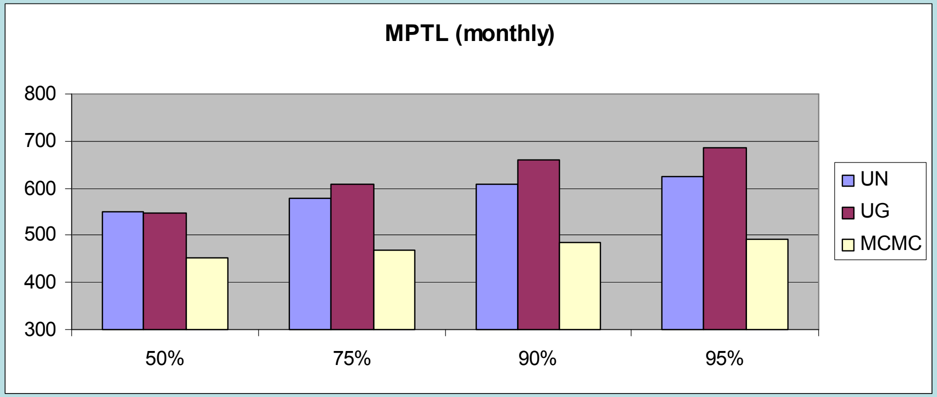


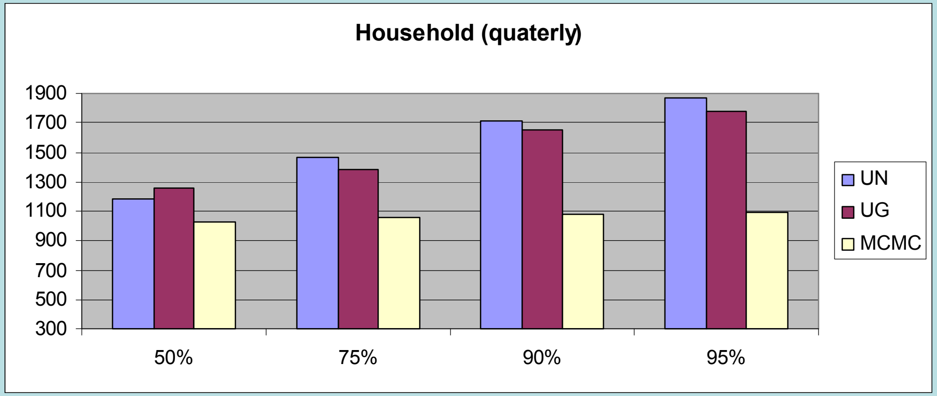


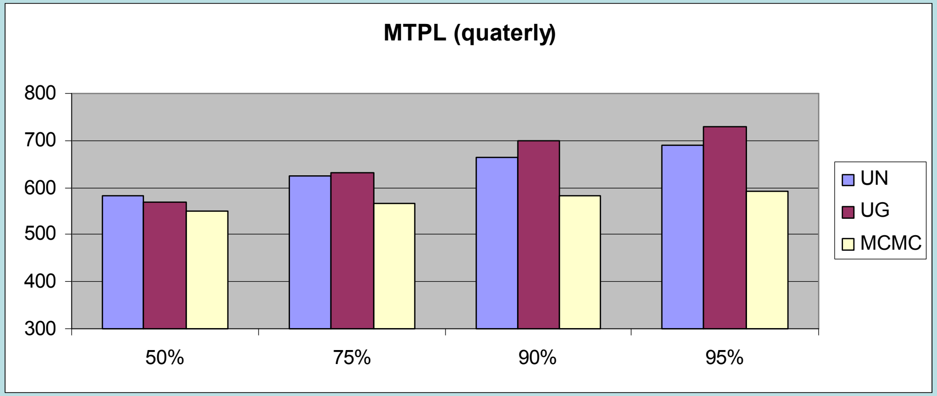


Eredmények: kvantilisek









Tartalékolási módszerek tesztelése

- Olyan intervallumot választunk, hogy minden információ ismert legyen: alsó háromszög is

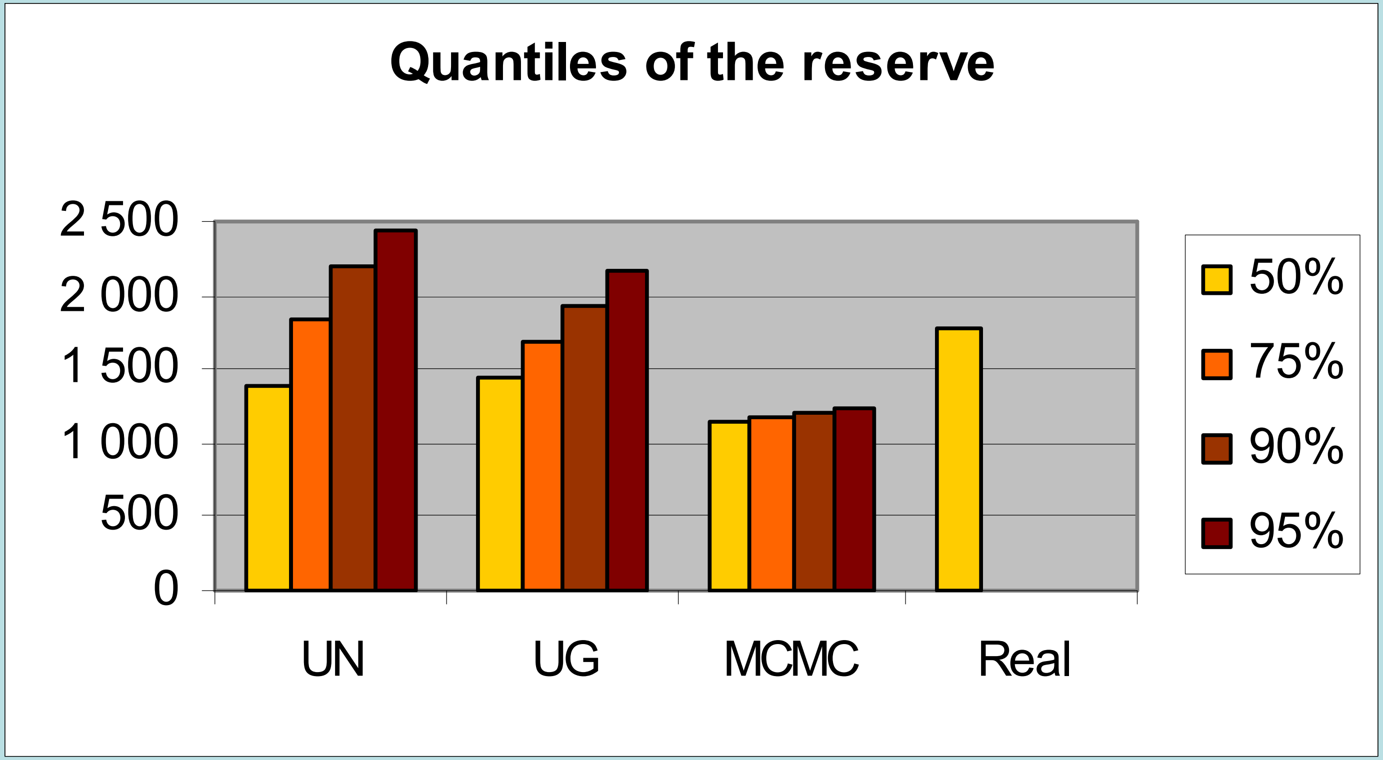
  ⇨ első három év (lakásbiztosítási adatok)

- Becsült értékek összehasonlítása a tényleges értékkel

$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,5}$
$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$	$C_{2,5}$
$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	$C_{3,4}$	$C_{3,5}$
$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$	$C_{4,4}$	$C_{4,5}$
$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$C_{5,3}$	$C_{5,4}$	$C_{5,5}$

Teszt-eredmények

- Valódi érték: 1788, Lánc-létra: 990



Konklúziók

- Pontbecslések nem megbízhatók
- Sztochasztikus módszerek nagyon különböző eredményeket adhatnak
- Módszer és periódus választása:
  - adatoktól is függően (hosszú/rövid kifutás)
  - teszteléssel
- Bootstrap, cross-validation módszerek

Köszönöm a figyelmet!